ПРИЛОЖЕНИЕ

ОБРАБОТКА ДАННЫХ. ОЦЕНКА ОШИБОК ИЗМЕРЕНИЙ

Измерением называется определение значения физической величины опытным путем с помощью специальных технических средств. Значение величины, найденное путем измерения, называется результатом измерения.

Измерения делятся на прямые и косвенные. Прямыми называются измерения, в которых искомое значение величины находится непосредственно из опыта путем отсчета по шкале измерительного прибора. Косвенные – это измерения, при которых искомое значение величины находят из известной зависимости между этой величиной и величинами, подвергаемыми прямым измерениям.

Никакое измерение не может быть выполнено абсолютно точно, поэтому результат измерения отклоняется от истинного значения измеряемой величины. Разница между результатом измерения и истинным значением измеряемой величины называется абсолютной погрешностью измерения:

$$\Delta x_i = x_i - X, \qquad (1)$$

где x_i – результат i-го измерения, X – истинное значение величины, Δx_i – абсолютная погрешность i-го измерения.

Используется также и относительная погрешность:

$$\eta_i = \Delta x_i / X. \qquad (2)$$

Относительная погрешность может быть выражена в процентах.

Напомним основные положения элементарной теории ошибок и методы обработки экспериментальных данных.

Различают три основных типа ошибок:

1.Систематические – ошибки, величины которых одинаковы во всех измерениях, проводившихся одним методом, на одних приборах (например, поправки на ноль прибора).

2.Случайные – ошибки, величина которых меняется непредсказуемым образом при повторных измерениях величины в тех же условиях. Случайные погрешности вызываются действием различных неконтролируемых факторов. Источником случайных ошибок может быть и сам экспериментатор из-за несовершенства его органов чувств.

3. Промахи- ошибки, обусловленные недостатком внимания экспериментатора.

При обработке экспериментальных данных нужно в первую очередь учесть все систематические ошибки, а затем перейти к оценке случайной ошибки.

Влияние случайных погрешностей можно существенно уменьшить усреднением результатов большого числа измерений. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – результаты отдельных измерений. Абсолютные погрешности отдельных результатов измерений:

$$\begin{aligned} \Delta x_1 &= x_1 - X, \\ \Delta x_2 &= x_2 - X, \qquad (3) \\ &\ldots, \\ \Delta x_n &= x_n - X \end{aligned}$$

Сложим равенства (3) и получим:

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i - n \cdot X, \qquad (4)$$

откуда:

$$X = -\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i + \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = -\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i - \overline{X}, \qquad (5)$$

где $\overline{X}$ - средний арифметический результат серии измерений. При большом числе измерений ($\mathbf{n} \to \infty$) можно считать, что $X \cong \overline{X}$. Чем больше **n**, тем точнее выполняется это равенство. Но практически **n** бывает не так уж велико, и $\overline{X}$ может заметно отличаться от X. Очень важно оценить возможную величину $\overline{X} - X$.

Интервал $\overline{X} \pm \Delta X$, в который с заданной вероятностью α попадает истинное значение X измеряемой величины, называется доверительным интервалом, соответствующим вероятности α. Вероятность α называется также доверительной вероятностью или надежностью.

Методы оценки доверительного интервала были разработаны английским математиком Госсетом (псевдоним "Стьюдент"). Доверительный интервал определяется как:

$$\Delta X = \tau_{\alpha}(\mathbf{n}) \cdot S_{\mathbf{n}}, \qquad (6)$$

где $\tau_{\alpha}(\mathbf{n})$ – коэффициент Стьюдента, $S_{\mathbf{n}}$- среднеквадратичная погрешность прямых измерений, определяемая по формуле:

$$S_n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2}{n(n-1)}}. \qquad (7)$$

Коэффициент Стьюдента находится для заданной надежности с помощью таблицы 1.

Таким образом, при обработке результатов прямых измерений предлагается следующий порядок операций:

1. Результаты каждого измерения записываются в таблицу.
2. Вычисляется среднее значение из **n** измерений.
3. Далее находятся абсолютные погрешности отдельных измерений.
4. Затем вычисляются квадраты погрешностей отдельных измерений.
5. Исключаются промахи.
6. Определяется среднеквадратичная погрешность результата серии измерений по формуле (7).
7. Задается значение надежности α.
8. Определяется коэффициент Стьюдента $\tau_{\alpha}(\mathbf{n})$ для заданной надежности (α) и числа произведенных измерений (**n**) по таблице 1.
9. Находятся границы доверительного интервала (погрешность результата измерений) по формуле (6).
10. Окончательный результат записывается в виде: $\mathbf{X} = \overline{X} \pm \Delta X$.
11. Оценивается относительная погрешность результата серии измерений $\eta = (\Delta X / \overline{X}) \cdot 100\%$.

Таблица 1.

Значения коэффициентов Стьюдента

n\α	**0.9**	**0.95**	**0.98**	**0.99**	**0.999**
2	6.31	12.71	31.82	63.66	636.62
3	2.92	4.30	6.96	9.92	31.60
4	2.35	3.18	4.54	5.84	12.94
5	2.13	2.78	3.75	4.60	8.61
6	2.02	2.57	3.36	4.03	6.86
7	1.94	2.45	3.14	3.71	5.96
8	1.90	2.36	3.00	3.50	5.40
9	1.86	2.31	2.90	3.36	5.04
10	1.83	2.26	2.82	3.25	4.78

Для косвенных измерений существует два способа оценки погрешности:

1. Если косвенные измерения проводятся в невоспроизводимых условиях, то значения величины вычисляются для каждого отдельного измерения, а затем обрабатываются как прямые измерения.
2. Погрешность косвенных измерений вычисляют как функцию погрешностей прямых измерений. Если **f = f(x, y, z),** то:

$$\Delta f = \sqrt{\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \cdot \Delta x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \cdot \Delta y^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \cdot \Delta z^2\right]},$$

где производные вычисляются при $x=\overline{X}$, $y=\overline{Y}$, $z=\overline{Z}$.

3. Окончательный результат записывается в виде:

$$f = f(x, y, z) = f(\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}) \pm \Delta f.$$

4. Определяется относительная погрешность результата серии косвенных измерений:

$$\eta = (\Delta f/f) \cdot 100\%.$$

Определение параметров линейной зависимости

На опыте часто измеряют пары величин **x** и **y**, причем одна из них (**y**) является функцией другой (**x**). Пусть в результате эксперимента получен ряд измерений величины **y**: $y_1, y_2, \ldots, y_n$, соответствующих значениям **x**: $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Необходимо установить зависимость между ними. Задача состоит в том, чтобы по экспериментальным точкам провести линию, которая как можно лучше соответствовала истинной зависимости **y=f(x).** Ограничимся линейной функцией **y=ax+b.** Линейная зависимость широко распространена в физике. Даже, если зависимость нелинейная, ее стараются преобразовать так, чтобы свести к линейной. Например, зависимость $y=A\cdot\exp(\alpha/x)$ преобразуется к виду: $\ln y = \ln A + \alpha/x$ и на графике строится зависимость **lny** от **1/x.**

Рассмотрим один из методов нахождения наиболее вероятных параметров линии (коэффициентов **a** и **b**), проходящей через набор экспериментальных точек: метод парных точек.

Этот метод является наиболее простым и применяется в основном для определения лишь наклона прямой, т.е. коэффициента **a**. Допустим, что у нас имеется ряд точек, лежащих на одной прямой. Требуется найти наилучшее значение тангенса угла наклона **a** и его погрешность. Выберем пары точек, достаточно удаленных друг от друга. Каждой парой определится некоторая прямая и угол ее наклона. Рассматривая пары точек, получим несколько значений (3-4) тангенса угла наклона. В качестве наилучшего значения **a** выбирается его среднее значение и обычным способом находится среднеквадратичная погрешность и доверительный интервал.

Такой метод дает удовлетворительные результаты лишь тогда, когда разности значений аргументов ($\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$) функции примерно одинаковы.